Lösungen der 1. Serie

Kl. 6 - 2019 / 2020

Aufgabe 1: (9 Punkte)

a) Es gibt 6 verschiedene Möglichkeiten für die Ziffer an der ersten Stelle. Bei jeder dieser 6 Möglichkeiten gibt es noch 5 verschiedene Ziffern, die an der zweiten Stelle stehen können (die erste Ziffer scheidet ja aus). Dementsprechend gibt es noch jeweils 4 mögliche Ziffern für die dritte Stelle usw. Für die Endziffer der sechsstelligen Zahl bleibt dann nur noch jeweils eine mögliche Ziffer übrig. Die gesuchte Anzahl lässt sich demnach als Produkt berechnen: Es sind $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! =$ **720** verschiedene Zahlen möglich.

(Die Kurzschreibweise „n!“ - sprich „n Fakultät“ - steht für das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis n.)

b) Die fünfte Ziffer der sechsstelligen Zahl $\overline{abcdef}$ steht fest: e = 5 folgt aus der Teilbarkeit durch 5.
Für b, d und f müssen die geraden Ziffern 2; 4 bzw. 6 eingesetzt werden (nicht notwendig in dieser Reihenfolge), wegen der Teilbarkeit durch die geraden Zahlen 2; 4 bzw. 6. (Für a und c bleiben also die Ziffern 1 bzw. 3 übrig.) Damit ist die sechsstellige Zahl auch schon durch 6 teilbar: Wegen ihrer Quersumme 21 ist sie durch 3 und wegen der geraden Endziffer auch durch 2 teilbar ist.
Der Fall d = 4 scheidet aus, denn weder 14 noch 34 sind durch 4 teilbar (Teilbarkeitsregel der 4).
Es bleiben also zunächst acht Kandidaten übrig:

→ mit d = 2: 143256 163254 341256 361254
→ mit d = 6: 143652 123654 341652 321654

Die geforderte Teilbarkeit von $\overline{abc}$ durch 3 ist nur erfüllt für **123654** und **321654**. Also gibt es genau diese zwei Lösungen.

Aufgabe 2: (8 Punkte)

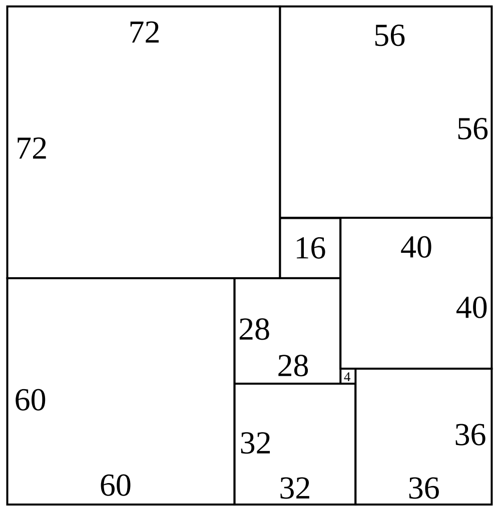
a) Das fehlende Quadrat hat eine Seitenlänge von **16 mm**, weil die vorgegebenen 8 Quadrate insgesamt nur eine Fläche von 16 640 mm² haben. (→ Restfläche: 256 mm² = 16 mm · 16 mm)

b) Das größte Quadrat kann nicht im Inneren liegen, weil die verbleibenden 8 Quadrate aneinander gelegt nur eine Länge von 272 mm ergeben, wohingegen der Umfang des größten Quadrates 288 mm ist. Ebenso kann das zweitgrößte Quadrat nicht im Inneren des Rechtecks liegen.

Die beiden größten Quadrate müssen benachbart sein. Wären sie nämlich diagonal gegenüberliegend, würde von den restlichen Quadraten eine Fläche von 2 · 60 mm · 72 mm = 8640 mm² auszufüllen sein. Deren Fläche ist aber insgesamt nur 8112 mm² groß. Eine Seitenlänge des Rechtecks beträgt demnach 72 mm + 60 mm = 132 mm.

Die andere Seitenlänge ist (16896 mm²) : (132 mm) = 128 mm.

Das kleinste Quadrat muss im Inneren der Rechteckfläche liegen, weil es am Rand sonst Lücken erzeugen würde. Es grenzt an genau 4 größere Quadrate und hat mit jedem dieser Quadrate genau einen Eckpunkt gemeinsam. Gleiches gilt für das zweitkleinste Quadrat.



Aufgabe 3: (8 Punkte)

a) Die Primfaktorzerlegung von 2450 lautet: $2450 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$. Durch geeignete Zusammenstellung der Primfaktoren findet man folgende sinnvolle Alterskombinationen der drei Personen (in Klammern ist jeweils die Summe der drei Alter angegeben):

1/25/98 (124), 1/35/70 (106), 1/49/50 (100), 2/25/49 (76), 2/35/35 (72), 5/5/98 (108), 5/7/70 (82), 5/10/49 (64), 5/14/35 (54), 7/7/50 (64), 7/10/35 (52), 7/14/25 (46)

b) Wenn der Opa das Alter der drei Personen zunächst nicht eindeutig bestimmen kann (obwohl er doch sein eigenes Alter kennt), so kann das nur daran liegen, dass die entsprechende Summe mehrfach auftritt. Offensichtlich ist das nur für 5/10/49 und 7/7/50 der Fall. Also ist **Opa 64 Jahre** alt. Nun hilft Fannys letzte Aussage weiter:
Wäre Tante Erna nämlich 50 Jahre oder älter, so kämen weiterhin beide Alterskombinationen in Frage. Wäre Tante Erna dagegen jünger als 49 Jahre, schieden beide Varianten aus. Weil die Lösung nach der letzten Information jedoch eindeutig sein soll, muss **Tante Erna** genau **49 Jahre** alt sein. Damit kommt für das Alter der drei Personen nur **5, 10 und 49 Jahre** in Frage.

(Übrigens: Fanny hat zwei Elternteile, die jeweils Geschwister haben können. Erna kann also durchaus „echte“ Tante von Fanny sein, ohne Tochter von „Opa“ sein zu müssen.)