Aufgabe 1: (6 Punkte)

a) Man benötigt mindestens **<u>6 Rohlinge</u>**. Aus ihnen kann man je ein Einzelteil herstellen und die abfallenden Späne einschmelzen. Daraus entsteht ein weiterer Rohling, aus dem man das siebente Einzelteil anfertigen kann. (Es bleiben sogar noch ein paar Späne übrig.) 5 Rohlinge hätten nicht gereicht, weil man daraus nur 5 Einzelteile herstellen könnte - die Späne reichen nicht für einen weiteren Rohling. ***(Dieser letzte Satz ist für eine vollständige Begründung notwendig!)***

b) Aus den 36 Rohlingen fertigt man zunächst 36 Einzelteile an. Aus den gesammelten Spänen lassen sich (36 : 6 =) 6 neue Rohlinge herstellen. Diese ergeben 6 weitere Einzelteile und einen neuen Rohling, der wiederum zu 1 Einzelteil verarbeitet werden kann. Es bleiben ein paar Späne übrig, die aber nicht für einen weiteren Rohling reichen. Insgesamt lassen sich so also 36 + 6 + 1 = **<u>43 Einzelteile</u>** herstellen.

→ siehe auch: KZM-Homepage

Aufgabe 2: (8 Punkte)

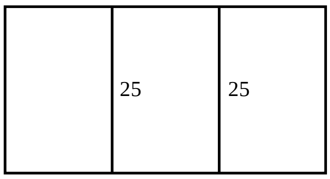
a) Sei n eine zweistellige Zahl. Wenn man vor n ihr Doppeltes schreibt, ergibt sich die Dezimaldarstellung der Zahl $m = 2n \cdot 100 + n = (2 \cdot 100 + 1) \cdot n = 201 \cdot n$. Da $201 = 3 \cdot 67$ teilerfremd zu 23 ist, ist m genau dann durch 23 teilbar, wenn n durch 23 teilbar ist. Damit ergeben sich genau folgende <u>vier</u> Möglichkeiten für m: **46 23**; **92 46**; **138 69**; **184 92**.

b) Ist n nun eine dreistellige Zahl, so ergibt sich die Zahl, die man erhält, wenn man vor n ihr Doppeltes schreibt, als $m = 2n \cdot 1000 + n = (2 \cdot 1000 + 1) \cdot n = 2001 \cdot n$. Es ist aber $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$, also sind **<u>alle</u>** so gebildeten Zahlen m durch 23 teilbar.

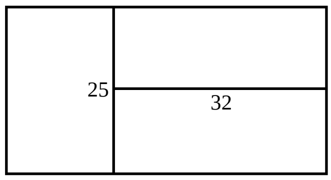
Aufgabe 3: (10 Punkte)

a) Bei dieser Teilaufgabe hat das äußere Rechteck die Seitenlängen 48 m und 25 m, also einen Umfang von 146 m. Hinzu kommen noch die Zäune im Inneren, deren Längen ebenso wie die Berechnung der Gesamtzaunlänge (in m) der Abbildung zu entnehmen sind.

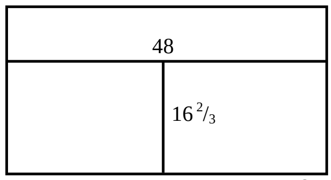
(Weitere Varianten sind möglich.)



$2 \cdot 48 + 4 \cdot 25 = \mathbf{196}$



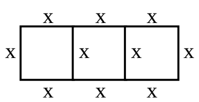
$2 \cdot 48 + 3 \cdot 25 + 32 = \mathbf{203}$



$3 \cdot 48 + 2 \cdot 25 + 16\,^2/_3 = \mathbf{210\,^2/_3}$

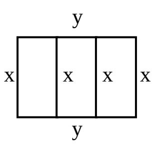
b) Ausgehend von den Varianten, die sich bei a) als günstig herausgestellt haben, berechnen wir mehrere Varianten:

<u>1. Drei Quadrate mit Seitenlänge x</u>: Es muss $10 \cdot x = 211$ gelten, also $x = 21{,}1$.



Damit ergibt sich für den Gesamtflächeninhalt: $A_{ges} = 3 \cdot x^2 = 1335{,}63$ (m²)

<u>2. Optimales Rechteck mit den Seitenlängen x und y</u>: Es muss $4x + 2y = 211$ gelten, also $y = 105{,}5 - 2x$.



Beim systematischen Probieren mit ganzzahligen Werten für x ergeben sich damit folgende Werte:

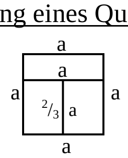
x (in m)	20	21	22	23	24	25	**26**	27	28	29	30
y (in m)	65,5	63,5	61,5	59,5	57,5	55,5	**53,5**	51,5	49,5	47,5	45,5
A = xy (in m²)	1310	1333,5	1353	1368,5	1380	1387,5	**1391**	1390,5	1386	1377,5	1365

Eine noch feinere Einteilung ergibt:

x (in m)	26	26,25	**26,375**	26,5	27
y (in m)	53,5	53	**52,75**	52,5	51,5
A = xy (in m²)	1391	1391,25	**1391,28125**	1391,25	1390,5

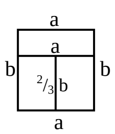
Tatsächlich ist mit $x = 26\,^3/_8$ und $y = 52\,^3/_4$ die optimale Lösung gefunden, und damit lautet der größtmögliche Gesamtflächeninhalt $A_{ges} = xy = \mathbf{1391\,^9/_{32} \approx 1391{,}28}$ **(m²)** . *(Anmerkung: In diesem optimalen Fall gilt gerade y = 2x.)*

<u>3. Dreiteilung eines Quadrats mit Seitenlänge a</u>: Es muss $5\,^2/_3 \cdot a = 211$ gelten, also $a = 37\,^4/_{17}$.



Damit ergibt sich für den Gesamtflächeninhalt: $A_{ges} = a^2 \approx 1386{,}47$ (m²)

<u>4. Optimales Rechteck mit den Seitenlängen a und b</u>: Es muss $3a + 2\,^2/_3 b = 211$ gelten, also $b = 79\,^1/_8 - 1\,^1/_8 a$.



Systematisches Probieren …

Die optimale Lösung ergibt sich mit $a = 35\,^1/_6$ und $b = 39\,^9/_{16}$, und damit lautet auch bei dieser Variante der Aufteilung der größtmögliche Gesamtflächeninhalt $A_{ges} = ab = 1391\,^9/_{32} \approx 1391{,}28$ (m²) .

Zusätzliche Lösungshinweise (nur auf der Homepage):

zu Aufgabe 1:

Wenn man zeigen will, dass die benötigte Mindestanzahl an Rohlingen 6 beträgt, dann gehört neben dem Nachweis, dass 6 Rohlinge reichen, unbedingt auch der Nachweis dazu, dass ein Rohling weniger nicht gereicht hätte! (Dieser zweite Nachweis hat bei den meisten Einsendern gefehlt.) Ebenso gehört bei Teilaufgabe b) eigentlich (wenigstens) eine Bemerkung dazu, dass ein 44. Einzelteil nicht mehr herstellbar ist.

Einige Einsender haben mit Gleichungen hantiert. Dazu hier die entsprechende Lösung zum Vergleichen:

Es gilt:

$$
\begin{array}{ll}
1\text{ R} = 1\text{ E} + {}^{1}/_{6}\text{ R} & |\cdot 6 \\
6\text{ R} = 6\text{ E} + 1\text{ R} & |-1\text{ R} \\
\underline{5\text{ R} = 6\text{ E}} &
\end{array}
$$

Das Material von 5 Rohlingen würde also (theoretisch) für 6 Einzelteile reichen. Es ist dabei aber zu beachten, dass man aufgrund der speziellen Umstände in diesem Fall aus 5 Rohlingen (praktisch) <u>nicht</u> 6 Einzelteile herstellen kann, weil die Späne der ersten fünf Rohlinge nicht zur Herstellung des zunächst benötigten sechsten Rohlings reichen.

Es folgt theoretisch weiter:

$$6\text{ R} = {}^{6}/_{5}\cdot 5\text{ R} = {}^{6}/_{5}\cdot 6\text{ E} = 7\,{}^{1}/_{5}\text{ E} = 7\text{ E} + {}^{1}/_{6}\text{ R}$$
$$36\text{ R} = 6\cdot 6\text{ R} = 43\,{}^{1}/_{5}\text{ E} = 43\text{ E} + {}^{1}/_{6}\text{ R}$$