Lösungen der 2. Serie

Kl. 5 - 2018 / 2019

Aufgabe 1: (8 Punkte)

Vorüberlegungen: $2019 = 3 \cdot 673 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 + 3 = 8 \cdot 252 + 3 = 12^2 \cdot 14 + 3 = \mathbf{6 \cdot 336 + 3} = 3 \cdot 672 + 3$
$= 12 \cdot 112 \cdot 1{,}5 + 3 = 13 \cdot 155 + 4 = 27 \cdot 75 - 6$
$= \mathbf{2^{11} - 30 + 1} = 2^{11} - 2^5 + 3 = 45^2 - 6 = 44^2 + 83 = 13^2 \cdot 12 - 9$
$= 2 \cdot 999 + 21 = 3 \cdot 666 + 21 = 6 \cdot 333 + 21 = 9 \cdot 222 + 21 = 18 \cdot 111 + 21$
$= 2022 - 3 = 2020 - 1 = 5 \cdot 404 - 1 = 2 \cdot 1010 - 1 = 2 \cdot 1001 + 17 = 2 \cdot 1003 + 13$ usw.

a) Manche Einsender hatten sich schon mit folgender Variante zufrieden gegeben:

$2019 = 1111 + 1111 - 111 - 111 + 11 + 11 - 1 - 1 - 1$ (21 Einsen)

Durch Ausklammern gleicher Faktoren geht es aber deutlich kürzer:

$2019 = 1111 \cdot (1 + 1) - 111 \cdot (1 + 1) + 11 + 11 - 1 - 1 - 1$ (18 Einsen)
$2019 = (1111 - 111) \cdot (1 + 1) + 11 + 11 - 1 - 1 - 1$ (16 Einsen)
$2019 = (1111 - 111 + 11 - 1) \cdot (1 + 1) - 1$ (13 Einsen)
$2019 = (1111 - 111 + 1 + 1 + 1 + 1) \cdot (1 + 1) + 11$ (15 Einsen)

Insbesondere das Potenzieren ermöglicht sehr kurze Lösungen:

$2019 = [(11 - 1)^{(1+1+1)} + 1 + 1 + 1 + 1] \cdot (1 + 1) + 11$ (14 Einsen)
$2019 = (1 + 1)^{11} - 11 - 11 - 11 + 1 + 1 + 1 + 1$ (14 Einsen)
$2019 = (1 + 1)^{11} - (1 + 1 + 1) \cdot 11 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ (13 Einsen)
$2019 = (11 + 1 + 1)^{(1+1)} \cdot (11 + 1) - 11 + 1 + 1$ (13 Einsen)
$2019 = (11 + 1)^{(1+1)} \cdot (11 + 1 + 1 + 1) + 1 + 1 + 1$ (13 Einsen)
$2019 = (1 + 1)^{11} - (1 + 1 + 1)^{(1+1+1)} - 1 - 1$ (12 Einsen)
$\mathbf{2019 = (1 + 1)^{11} - (1 + 1 + 1) \cdot (11 - 1) + 1}$ **(11 Einsen)**
$\mathbf{2019 = (1 + 1) \cdot (11111 - 1) : 11 - 1}$ **(11 Einsen)**

Vermutlich ist 11 die kleinste Anzahl von Einsen, die benötigt wird.

Weitere Varianten:
$2019 = (111 + 111) \cdot (11 - 1 - 1) + 11 + 11 - 1$ (15 Einsen)
$2019 = (1 + 1) \cdot [111 \cdot (11 - 1 - 1) + 11 - 1] + 1$ (13 Einsen)
$2019 = (1 + 1) \cdot [(11111 - 1) : 11 - 1] + 1$ (12 Einsen)
$2019 = (11 - 1) \cdot (1 + 1) \cdot (111 - 11 + 1) - 1$ (12 Einsen)

b) Angegeben sind auch hier nur einige Varianten, viele weitere sind möglich:

$2019 = 2222 - 222 + (2 \cdot 2)^2 + 2 + 2 : 2$ (13 Zweien)
$2019 = 2222 - 222 + 22 - 2 - 2 : 2$ (12 Zweien)
$2019 = 222 \cdot (22 : 2 - 2) + 22 - 2 : 2$ (11 Zweien)
$2019 = 44 \cdot 44 + 44 + 44 - 4 - 4 : 4$ (11 Vieren)
$2019 = 44 \cdot 44 + 4 \cdot 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 4 - 4 : 4$ (12 Vieren)
$2019 = 44 \cdot 44 + 4 \cdot (4 \cdot 4 + 4) + 4 - 4 : 4$ (11 Vieren)
$2019 = 2^{(22:2)} - 22 - 22 : 2 + 2 + 2$ (12 Zweien)
$2019 = (22 \cdot 2 + 2 : 2)^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2$ (10 Zweien)
$2019 = (22 \cdot 2 + 2 : 2)^2 - 2 - 2 - 2$ (9 Zweien)
$2019 = [(9 + 9) \cdot (999 + 9) + 9 + 9 + 9] : 9$ (10 Neunen)
$2019 = 3 \cdot (333 + 333 + 3 + 3) + 3$ (10 Dreien)
$2019 = (4^4 - 4) \cdot (4 + 4) + 4 - 4 : 4$ (8 Vieren)
$2019 = 5^5 - 5555 : 5 + 5$ (8 Fünfen)
$\mathbf{2019 = (3 + 3) \cdot (333 + 3) + 3}$ **(7 Dreien)**

Vermutlich ist 7 die kleinste Anzahl von gleichen Ziffern, die benötigt wird.

Aufgabe 2: (7 Punkte)

a) Die beiden unteren Ecken habe als einzige eine ungerade Anzahl von Verbindungslinien (nämlich 3), d. h. sie müssen Start- bzw. Endpunkt sein (und werden beim Zeichnen jeweils noch ein weiteres Mal durchlaufen).

Ecken, die weder Start- noch Endpunkt sind, müssen eine gerade Anzahl von Verbindungslinien haben, damit jeweils beim „Ankommen“ auch wieder ein „Weggehen“ möglich ist. Eine „gerade“ Ecke kann nur dann Start- (und gleichzeitig End-) Punkt sein, wenn es überhaupt keine „ungerade“ Ecke gibt - dies ist jedoch hier nicht der Fall.

b) Egal, in welcher Reihenfolge das Haus gezeichnet wird, es wird sich immer das Ergebnis **101** ergeben. Begründung:

Stellen wir uns zunächst vor, es gäbe nur Additionen und keine Multiplikationen. Beim Zeichnen des Hauses wird die Zahl 4 an der Hausspitze einmal besucht, während alle anderen Zahlen jeweils genau zweimal besucht werden. Egal in welcher Reihenfolge man das Haus zeichnet, die Summe setzt sich immer aus den neun Summanden 4; 5; 5; 6; 6; 7; 7; 8; 8 zusammen. Es kommt bei einer Addition aber nicht auf die Reihenfolge der Summanden an, es ergibt sich unabhängig von der Reihenfolge stets dieselbe Summe (Kommutativgesetz der Addition).

Nun kommen in unserem Haus aber auch zwei Multiplikationen vor. Es steht jedoch bereits fest, welche Zahlen jeweils miteinander multipliziert werden (8 und 6 bzw. 4 und 5), das ist durch die Kanten festgelegt, an denen die Multiplikationszeichen stehen. In welcher Richtung diese Kanten jeweils durchlaufen werden, hat keinen Einfluss auf das Ergebnis, weil auch die Multiplikation kommutativ ist.

Da die Punkt-vor-Strich-Regel gelten soll, sind die Zahlen 5; 6; 7; 7; 8; $(4 \cdot 5 =)$ 20 und $(6 \cdot 8 =)$ 48 zu addieren. Es spielt wieder keine Rolle, in welcher Reihenfolge diese sieben Zahlen addiert werden - das Ergebnis wird immer **101** lauten.

Aufgabe 3: (10 Punkte)

1	1	1	3
1	2	2	5
1	2	3	6
3	5	6	

a) Diese Aufgabe ist sehr leicht zu lösen, indem man zuerst für A, B und C drei beliebige (paarweise verschiedene) Zahlen einsetzt und anschließend die Zeilen- bzw. Spaltensummen berechnet. Für z. B. A = 1, B = 2 und C = 3 ergeben sich so die Randzahlen 3, 5 und 6 (siehe Abbildung).

b) Wir bezeichnen die zur ersten Zeile (bzw. Spalte) gehörende Randzahl mit R_1, analog dazu R_2 und R_3. Die Lösungszahlen für die Addition seien A_A, B_A und C_A, die für die Multiplikation A_M, B_M und C_M.

Es soll gelten: $R_1 = A_A + A_A + A_A = 3 \cdot A_A$ und $R_1 = A_A \cdot A_A \cdot A_A = A_A{}^3$. Also muss R_1 eine durch 3 teilbare Kubikzahl sein.

Die kleinstmögliche Randzahl mit diesen Eigenschaften ist **$R_1 = 27$**. Damit ergibt sich: $A_M = 3$ und $A_A = 9$.

B_M kann nicht gerade sein, weil dann R_2 gerade wäre. Dies wiederum würde zu einem Widerspruch bei der Addition führen, denn $A_A + 2 \cdot B_A = 9 + 2 \cdot B_A$ ist eine ungerade Zahl. Wir probieren es wieder mit der kleinstmöglichen Zahl: $B_M = 5$ (1 ist zu klein, weil R_2 nicht kleiner als A_A sein kann, und 3 schon vergeben). Daraus folgt **$R_2 = 75$** und $B_A = 33$.

Mögliche Lösungen für C sind nun relativ leicht zu finden: C_M kann nicht 1 oder 2 sein, weil R_3 dann kleiner als $A_A + B_A$ wäre. Die 3 ist schon vergeben, also ist die kleinstmögliche Zahl: $C_M = 4$. Es folgt: **$R_3 = 60$** und $C_A = 18$. Damit ist das Rätsel vollständig gelöst.

(Größere mögliche Randzahlen wären z. B. 27 / 147 / 84 oder 216 / 96 / 120 .)

Multiplikation:

3	3	3	27
3	5	5	75
3	5	4	60
27	75	60	

Addition:

9	9	9	27
9	33	33	75
9	33	18	60
27	75	60	