Lösungen der 1. Serie

<u>*Zur Information*</u>:

Die Aufgaben der ersten Serie waren durchaus knifflig. Wir finden es prima, dass du dich trotzdem an sie herangewagt und dich mit ihnen beschäftigt hast. Viele Schüler haben beachtlich hohe Punktzahlen erzielt, z. B. haben immerhin 30 der 115 Teilnehmer mindestens 20 Punkte erreicht. Aber auch diejenigen, bei denen die Punkteausbeute vielleicht nicht ganz so hoch war wie aus dem Unterricht gewohnt, sollten den Kopf nicht hängen lassen.
Arbeite bitte auch die angegebenen Lösungsvorschläge durch. Sie sollen dir helfen, bestimmte Herangehensweisen an mathematische Fragestellungen kennen zu lernen. Volle Punktzahl kann bei einer Aufgabe nur erzielt werden, wenn die Lösungen und der Lösungsweg ***vollständig, nachvollziehbar*** *und* ***übersichtlich*** *dargestellt und die einzelnen Teilschritte exakt* ***begründet*** *worden sind.*

Aufgabe 1: (9 Punkte)

Die drei größten Produkte sind:	a)		b)		c)	
		$84\,000 = 96 \cdot 875$		$96\,726 = 98 \cdot 987$		$97\,812 = 99 \cdot 988$
		$83\,955 = 87 \cdot 965$		$96\,628 = 98 \cdot 986$		$97\,804 = 98 \cdot 998$
		$83\,905 = 97 \cdot 865$		$96\,530 = 98 \cdot 985$		$97\,713 = 99 \cdot 987$

<u>*Vorüberlegungen*</u>:

- *Die größten Produkte werden erreicht, wenn eine zweistellige Zahl mit einer dreistelligen Zahl multipliziert wird. Dies kann man durch (systematisches) Probieren herausfinden oder durch Überlegungen wie z. B. die folgende: Das Produkt einer einstelligen Zahl mit einer beliebigen Zahl x kann nicht größer als 9 · x sein - und ist damit mit Sicherheit kleiner, als wenn man die Ziffer einfach nur bei x angehängt hätte (denn dadurch wird der Wert von x mindestens verzehnfacht). Daraus folgt, dass das Produkt aus nur zwei Faktoren gebildet werden sollte. (usw.)*
- *Klar ist auch, dass man innerhalb eines Faktors die Ziffern in absteigender Reihenfolge anordnen sollte.*

Aufgabe 2: (11 Punkte)

a) In der dritten Zeile ergeben fünf ♥ die Summe 55, also steht ♥ für die Zahl 55 : 5 = 11. In der fünften Spalte müssen demzufolge vier ☺ gerade 43 − 11 = 32 ergeben, also steht ☺ für 32 : 4 = 8. Für das weitere Vorgehen gibt es nun mehrere Möglichkeiten. Wenn man sich z. B. die erste Zeile ansieht, kann man erkennen, dass zwei X und ein ☐ gerade 68 − 11− 8 = 49 ergeben. Damit kann in der fünften Zeile (in der diese Kombination ebenfalls auftaucht) geschlussfolgert werden, dass ⌘ für 77 − 49 − 8 = 20 steht. Aus der vierten Zeile (oder aus der ersten oder vierten Spalte) folgt dann X = 17, und schließlich ergibt sich ☐ = 15. Das vollständig mit Zahlen ausgefüllte Rätsel ist in der Abbildung (rechts) angegeben. *(Es ist zu empfehlen, zur Sicherheit auch eine Probe in allen Zeilen und Spalten machen.)*

17	17	15	11	8	68
17	15	20	8	8	68
11	11	11	11	11	55
17	20	20	20	8	85
20	17	15	17	8	77
82	80	81	67	43	

b) Es ist natürlich kein Zufall, dass die Summe aller Zeilensummen mit der Summe aller Spaltensummen übereinstimmt (sie beträgt hier jeweils 353), weil in beiden Fällen ja die Summe aller Zahlen in den 25 Feldern des 5x5-Quadrats berechnet wird - nur eben in verschiedenen Teilsummen zusammengefasst.
(Wer es nicht glaubt, der möge einfach mal versuchen, ein Beispiel zu entwerfen, bei dem das <u>nicht</u> so ist... ☺)

c) Gesucht sind also drei Zahlen, für die Summe und Produkt übereinstimmen. Man findet nur die Möglichkeit 1 + 2 + 3 = 1 · 2 · 3 = 6. Angegeben sind mögliche Lösungen für das 3x3- bzw. 4x4-Quadrat (dort gilt 1 + 1 + 2 + 4 = 1 · 1 · 2 · 4 = 8). Durch Ersetzen der Zahlen durch entsprechende Symbole kann man aus diesen Lösungen wieder Rätsel entwickeln.

1	2	3	6
2	3	1	6
3	1	2	6
6	6	6	

1	2	3	6
3	1	2	6
2	3	1	6
6	6	6	

1	1	2	4	8
1	1	4	2	8
2	4	1	1	8
4	2	1	1	8
8	8	8	8	

1	1	2	4	8
1	2	4	1	8
2	4	1	1	8
4	1	1	2	8
8	8	8	8	

1	1	2	4	8
1	2	4	1	8
4	1	1	2	8
2	4	1	1	8
8	8	8	8	

Aufgabe 3: (7 Punkte)

Zunächst ist klar, dass die Anzahl der Teilnehmer durch 5 teilbar sein muss, weil aus jeder Schule fünf Schüler starten. Außerdem muss sie ungerade sein, da es sonst nicht möglich wäre, dass Stefanie in der Ergebnisliste genau in der Mitte steht. Weil Stefanie erfolgreicher als Roman war, ist ihre Platznummer höchstens 47. Daher ist die Teilnehmeranzahl kleiner oder gleich 47 + 46 = 93. Da Richard auf dem 76. Platz gelandet ist, gibt es andererseits mindestens 76 Teilnehmer. Das einzige ungerade Vielfache von 5 zwischen 76 und 93 ist 85. Die Teilnehmeranzahl muss also 85 betragen. *(Auch möglich: Systematisches Probieren...)*

Somit haben 85 : 5 = **17 Schulen** an diesem Mannschaftswettbewerb teilgenommen.