Lösungen der 4. Serie

Aufgabe 1: (8 Punkte)

a) Ein Unentschieden kommt zustande, wenn bei allen drei Würfeln die Augenzahl 3 oben liegt. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt $^1/_6 \cdot 1 \cdot {}^1/_6 = \mathbf{^1/_{36}}$.

b) Ein Stechen (gegen Grün) wird notwendig, wenn entweder Blau oder Rot (aber nicht beide gleichzeitig) eine 3 zeigen sowie der jeweils andere Würfel eine niedrigere Augenzahl. Dafür beträgt die Wahrscheinlichkeit $^1/_6 \cdot {}^3/_6 + {}^1/_6 \cdot {}^2/_6 = \mathbf{^5/_{36}}$.

(Wie gehabt: In diesem Stechen gegen Grün hätte Blau die höheren und Rot die geringeren Gewinnchancen.)

c) Diesmal gibt es $6^3 = 216$ gleichwahrscheinliche Fälle. Grün gewinnt immer dann, wenn Blau die 1 zeigt und Rot die 2. Dafür beträgt die Wahrscheinlichkeit $^2/_6 \cdot {}^3/_6 = {}^1/_3 \cdot {}^1/_2 = \mathbf{^1/_6}$.
Blau gewinnt immer dann, wenn eine 4 oben liegt und gleichzeitig bei Rot keine 5. Dafür beträgt die Wahrscheinlichkeit $^3/_6 \cdot {}^4/_6 = {}^1/_2 \cdot {}^2/_3 = \mathbf{^1/_3}$.
Rot gewinnt immer dann, wenn eine 5 oben liegt. Dafür beträgt die Wahrscheinlichkeit $^2/_6 = \mathbf{^1/_3}$.

<u>Hinweis</u>: *Bei a) bis c) sind alle möglichen Ausgänge erfasst, also muss die Summe gerade 1 ergeben.*
→ *Probe:* $^1/_{36} + {}^5/_{36} + {}^1/_6 + {}^1/_3 + {}^1/_3 = {}^{(1+5+6+12+12)}/_{36} = {}^{36}/_{36} = 1$ *(Stimmt!)*

Aufgabe 2: (8 Punkte)

a) Die insgesamt 49 möglichen Zahlenpaare sind: (1; 1 000 000); (2; 500 000); (4; 250 000); (5; 200 000); (8; 125 000); (10; 100 000); (16; 62 500); (20; 50 000); (25; 40 000); (32; 31 250); (40; 25 000); (50; 20 000); (64; 15 625); (80; 12 500); (100; 10 000); (125; 8000); (160; 6250); (200; 5000); (250; 4000); (320; 3125); (400; 2500); (500; 2000); (625; 1600); (800; 1250); (1000; 1000); (1250; 800); ... ; (1 000 000; 1).

b) Die Primfaktorzerlegung (PFZ) der Ausgangszahl lautet: $1\,000\,000 = 10^6 = (2 \cdot 5)^6 = 2^6 \cdot 5^6$.
In der PFZ des ersten Faktors (a) kann der Faktor 2 gar nicht vorkommen, oder genau einmal usw. - maximal sechsmal. Das sind 7 verschiedene Möglichkeiten. Ebenso gibt es 7 verschiedene Möglichkeiten für die Anzahl der Faktoren 5 in der PFZ von a. Insgesamt gibt es für a also $7 \cdot 7 = 49$ verschiedene Möglichkeiten: 1 $(= 2^0 \cdot 5^0)$; 2 $(= 2^1 \cdot 5^0)$; 4 $(= 2^2 \cdot 5^0)$; 5 $(= 2^0 \cdot 5^1)$; 8 $(= 2^3 \cdot 5^0)$; 10 $(= 2^1 \cdot 5^1)$; ... ; 500 000 $(= 2^5 \cdot 5^6)$; 1 000 000 $(= 2^6 \cdot 5^6)$. Der zugehörige Faktor b ergibt sich dann jeweils eindeutig als Quotient $^{1\,000\,000}/_a$ - seine PFZ enthält gerade alle fehlenden Primfaktoren.
Dementsprechend gibt es auch **49 verschiedene (geordnete) Zahlenpaare**, die die Aufgabenstellung erfüllen.

c) Sobald in einer der beiden PFZ sowohl eine 2 als auch eine 5 auftaucht, wird eine Null als (End-)Ziffer bei diesem Faktor auftreten. Die einzige Möglichkeit, dies zu vermeiden, besteht darin, dass die eine Zahl sämtliche Zweien und die andere Zahl sämtliche Fünfen in der PFZ hat. Die einzigen möglichen Zahlenpaare sind also **(64; 15 625)** und **(15 625; 64)**.

Aufgabe 3: (8 Punkte)

a) Legt man (gedanklich) auf beide Seiten der zweiten Waage je eine Kugel, so ändert sich dadurch am Gleichgewicht nichts. Durch Vergleich der ersten beiden Waagen erkennt man nun, dass zwei Zylinder genauso schwer sind wie ein Zylinder und zwei Kugeln zusammen. Also ist ein Zylinder (Z) so schwer wie zwei Kugeln (K): Z = 2K.
Ersetzt man nun den Zylinder auf der zweiten Waage durch zwei Kugeln, so erkennt man, dass ein Würfel (W) durch <u>**3 Kugeln**</u> im Gleichgewicht gehalten wird (W = 3K).

b) Aus a) folgt, dass zwei Würfel so schwer sind wie sechs Kugeln oder wie drei Zylinder. Damit hat man schon die erste Möglichkeit gefunden: 3Z = 2W. Eine weitere Möglichkeit entsteht, indem man auf beiden Seiten der Waage je einen Zylinder hinzufügt: 4Z = 2W + Z. Durch analoges Vorgehen findet man (unter Beachtung der jeweiligen Maximalanzahlen) insgesamt <u>**13 Möglichkeiten**</u>, die in der Tabelle aufgelistet sind. (Weitere Varianten entstehen nur noch durch Vertauschen von links und rechts, was aber keine neue Aufteilung der Gegenstände bedeutet.)

links		**rechts**		*Probe*	
W	**Z**	**W**	**Z**	$W_{ges} \le 6$	$Z_{ges} \le 8$
0	**3**	**2**	**0**	*2*	*3*
0	**4**	**2**	**1**	*2*	*5*
0	**5**	**2**	**2**	*2*	*7*
0	**6**	**4**	**0**	*4*	*6*
0	**7**	**4**	**1**	*4*	*8*
1	**3**	**3**	**0**	*4*	*3*
1	**4**	**3**	**1**	*4*	*5*
1	**5**	**3**	**2**	*4*	*7*
1	**6**	**5**	**0**	*6*	*6*
1	**7**	**5**	**1**	*6*	*8*
2	**3**	**4**	**0**	*6*	*3*
2	**4**	**4**	**1**	*6*	*5*
2	**5**	**4**	**2**	*6*	*7*

Aufgabe 4: (9 Punkte)

a) Für die erste Stelle gibt es genau 6 mögliche Ziffern. Für die zweite Stelle bleiben dann noch genau 5 mögliche Ziffern übrig usw. Insgesamt sind also $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$ <u>**720**</u> verschiedene Zahlen möglich. *(6! - lies: „6 Fakultät“)*

b) Wegen der geforderten Teilbarkeit durch 5 muss **e = 5** sein. Die Ziffern b, d und f müssen allesamt gerade sein (2; 4 bzw. 6), für a und c bleiben also die restlichen ungeraden Ziffern (1 bzw. 3) übrig. Es gilt demnach a + c = 4, und wegen der Teilbarkeit durch 3 muss a + b + c durch 3 teilbar sein. Dies ist nur für **b = 2** erfüllt. Der Fall d = 4 scheidet aus, denn weder 14 noch 34 sind durch 4 teilbar (Teilbarkeitsregel der 4) - also muss **d = 6** und **f = 4** gelten.

Ergebnis: Es gibt genau zwei Lösungen, die alle Bedingungen erfüllen (auch die Teilbarkeit durch 6): <u>**321654**</u> und <u>**123654**</u>.

<u>**Knobel-Ei**</u>: Man findet achtmal die Zahl 11 in „ALE“ => ACHT ELF IN ALE => **ACHTELFINALE**