Lösungen der 3. Serie

Kl. 6 - 2017 / 2018

Aufgabe 1: (8 Punkte)

B \ R	5	5	3	2	2	2
4	R	R	B	B	B	B
4	R	R	B	B	B	B
4	R	R	B	B	B	B
3	R	R	U	B	B	B
1	R	R	R	R	R	R
1	R	R	R	R	R	R

a) Jeder Würfel hat sechs Seitenflächen, also gibt es im Vergleich zweier Würfel genau $6 \cdot 6 = 36$ gleich wahrscheinliche Fälle. In der Tabelle sind diese 36 Fälle für den Vergleich des blauen und des roten Würfels dargestellt. Man erkennt, dass Rot in 20 Fällen gewinnt und Blau in 15 Fällen (1 Unentschieden). Rot gewinnt somit $^4/_3$-mal so oft wie Blau, **Rot ist also besser als Blau**.
Zum Beispiel durch analoge Tabellen findet man heraus: **Blau ist besser als Grün** (Blau gewinnt in 18 Fällen, Grün in 12 Fällen, 6 Unentschieden → Blau gewinnt 1,5-mal so oft wie Grün) und **Grün ist besser als Rot** (Grün gewinnt in 18 Fällen, Rot in 12 Fällen, 6 Unentschieden → Grün gewinnt 1,5-mal so oft wie Rot). Es gibt also keinen „besten“ Würfel (ähnlich wie beim Stein-Schere-Papier-Spiel). Roman, der das Prinzip durchschaut hat, wird also mit großer Wahrscheinlichkeit gewinnen, denn da er sich seinen Würfel zuletzt aussucht, kann er immer einen nehmen, der die höheren Gewinnchancen hat.

b) Wegen $^4/_3 < 1{,}5$ ist Romans Überlegenheit beim Duell Rot-Blau geringer als bei den anderen beiden Farbkombinationen. Lydia sollte demnach den **<u>blauen</u>** Würfel wählen (Roman nimmt dann den roten), um ihre (geringen) Siegchancen möglichst hoch zu halten. *(Bei jeweils hundert Würfen ist zu erwarten, dass Roman im Durchschnitt ca. 56-mal gewinnt und Lydia ca. 42-mal. Es ist und bleibt jedoch ein Zufallsexperiment, d. h. auch wenn es nicht sehr wahrscheinlich ist, so kann es doch passieren, dass Lydia in einem dieser Duelle mehr Siege als Roman erreicht.)*

Aufgabe 2: (8 Punkte)

a) Die Primfaktorzerlegung von 2018 lautet: $2018 = 2 \cdot 1009$. Da die Zahl 2018 selbst nicht abgezogen werden darf, bleiben Alexander am Anfang genau **<u>drei</u>** Möglichkeiten: Er kann die Zahl 1 subtrahieren (und als neue Zahl die **2017** anschreiben) oder die Zahl 2 (und **2016** notieren) oder die Zahl 1009 (und **1009** anschreiben).

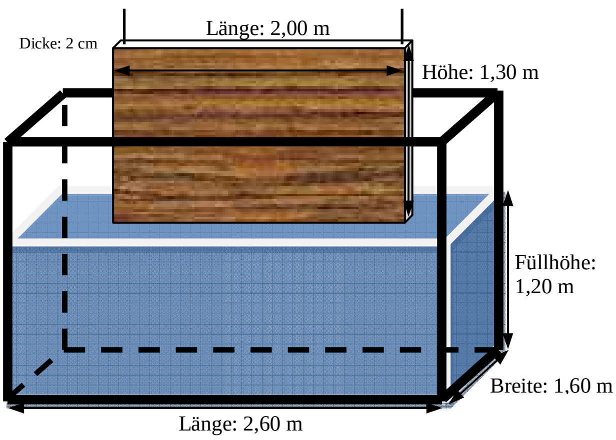
b) **<u>Alexander</u>** ist derjenige, der bei diesem Spiel den Gewinn erzwingen kann. Seine Strategie besteht darin, jeweils einen solchen Teiler auszuwählen, dass er Boris jedes Mal eine ungerade Zahl hinterlässt. Hat Boris nämlich eine ungerade Zahl x an der Tafel stehen, so sind auch alle Teiler dieser Zahl ungerade. Zieht er einen davon von x ab, so ist die Differenz in jedem Fall eine gerade Zahl. Insbesondere kann er nicht die 1 an die Tafel schreiben und somit auch nicht gewinnen.
Hat hingegen Alexander (so wie bei seinem ersten Zug die 2018) eine gerade Zahl y an der Tafel stehen, so hat diese mindestens einen ungeraden Teiler, nämlich die 1. Zieht er die 1 (oder irgendeinen anderen ungeraden Teiler) von y ab, so ist die Differenz ebenfalls eine ungerade Zahl.
Alexander kann also in seinem ersten Zug, so wie auch in jedem seiner folgenden Züge, Boris eine ungerade Zahl hinterlassen. Boris aber muss jedes Mal eine gerade Zahl für Alexander an die Tafel schreiben. Da die angeschriebene Zahl jeweils kleiner als die vorhergehende ist, wird Alexander nach endlich vielen Schritten die 1 an die Tafel schreiben können und gewinnen.

Aufgabe 3: (6 Punkte)

a) Wir stellen zunächst eine Vorüberlegung an: Aussage (1) kann auch so formuliert werden, dass die Voraussetzung für das Essen von Brötchen das Trinken von Milch ist. Wenn also Herr BOOLE keine Milch trinkt, dann isst er auch kein Brötchen. Wir wissen, dass Herr BOOLE zum Mittag Kaffee getrunken hat. Also nahm er keine Milch zu sich, was durch Aussage (3) belegt ist. Nach unserer Vorüberlegung - also Aussage (1) - ist damit klar, dass er auch kein Brötchen gegessen hat. Aussage (2) verrät uns nun, dass Herr BOOLE zum Mittag **<u>keine Suppe</u>** zu sich genommen hat.
In Kurzform lautet die gültige Schlusskette: $\boxed{\text{K => nicht M => nicht B => nicht S}}$.
(Übrigens: Die dazu gleichwertige Schlusskette, die sogenannte Kontraposition, lautet: S => B => M => nicht K.)

b) Für den Fall, dass Herr BOOLE keinen Kaffee trinkt, ist in den Regeln nichts ausgesagt worden. Insbesondere darf man in der oben angegebenen Kontraposition-Schlusskette nicht einfach die Richtung der Pfeile umkehren. Dies wären neue Aussagen, über deren Wahrheitsgehalt zunächst nichts bekannt ist. Demzufolge kann man in diesem Fall **<u>keine</u>** weiteren sicheren Aussagen über den abendlichen Speiseplan des Herrn BOOLE ableiten.

Aufgabe 4: (9 Punkte)



Das Volumen der Flüssigkeit beträgt $2{,}60\text{ m} \cdot 1{,}60\text{ m} \cdot 1{,}20\text{ m} = 4{,}992\text{ m}^3$. Die zehn Platten haben zusammen ein Volumen von $10 \cdot 0{,}02\text{ m} \cdot 1{,}30\text{ m} \cdot 2{,}00\text{ m} = 0{,}52\text{ m}^3$. Damit beträgt das Gesamtvolumen $(4{,}992 + 0{,}52)\text{ m}^3 = 5{,}512\text{ m}^3$.
Das Becken hat eine Querschnittsfläche von $2{,}60\text{ m} \cdot 1{,}60\text{ m} = 4{,}16\text{ m}^2$. Wenn man das Gesamtvolumen durch die Querschnittsfläche teilt, so erhält man die Flüssigkeitsstand, wenn die Platten gerade vollständig eingetaucht sind: $5{,}512\text{ m}^3 : 4{,}16\text{ m}^2 = \mathbf{1{,}325\text{ m}}$. Weil die Platten jeweils 1,30 m hoch sind, befinden sich ihre Unterkanten dann jeweils $(1{,}325 - 1{,}30)\text{ m} = 0{,}025\text{ m}$ über dem Boden des Beckens. Da sie zu Beginn 1,20 m über dem Boden waren, müssen sie um $(1{,}20 - 0{,}025) = \mathbf{1{,}175\text{ m}}$ abgesenkt worden sein.

*<u>Alternativlösung</u>: Die Platten verdrängen Flüssigkeit mit einem Volumen von 0,52 m³. Dividiert man dieses Volumen durch die Querschnittsfläche des Beckens (4,16 m²), erhält man 12,5 cm. Um diese Höhe steigt der Flüssigkeitsspiegel im Becken, so dass die Flüssigkeit eine Gesamthöhe von **132,5 cm** erreicht. Beim Eintauchen der Platten steigt der Flüssigkeitsspiegel kontinuierlich. Das Gestell muss nur um weitere 130 cm − 12,5 cm = **117,5 cm** abgesenkt werden, weil die Flüssigkeit den Platten „entgegen kommt“.*

<u>Ergebnis</u>: Die Platten müssen um **<u>1,175 m</u>** abgesenkt werden. Die Flüssigkeit im Becken steht dann **<u>1,325 m</u>** hoch.