Lösungen der 2. Serie

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Weil alle 7 Figuren zusammen 144 g wiegen und die oberste Aufhängung im Gleichgewicht ist, müssen die drei Figuren links genauso viel wiegen wie die vier Figuren rechts, also jeweils (0,5 · 144 g =) 72 g.
Weil links die zweite Aufhängung auch im Gleichgewicht ist, sind das Dreieck und der Kreis zusammen genauso schwer wie das Karo, also jeweils (0,5 · 72 g =) 36 g. Weil links die dritte Aufhängung auch im Gleichgewicht ist, sind Dreieck und Kreis gleich schwer, und zwar jeweils (0,5 · 36 g =) 18 g.
Auf der rechten Seite ergeben sich durch analoge Überlegungen, dass das Quadrat 36 g, das Dreieck 18 g und schließlich Herz und **Stern** jeweils <u>**9 g**</u> schwer sind.

Aufgabe 2: (7 Punkte)

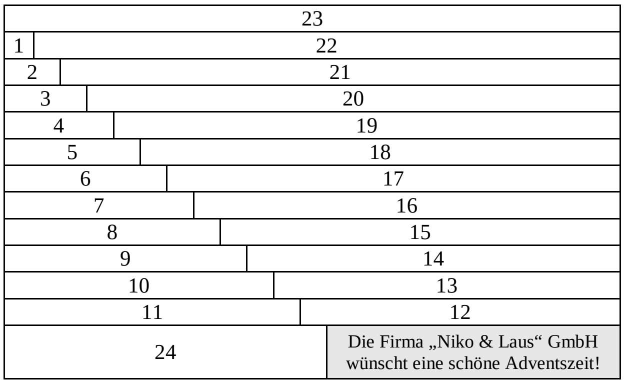
a) Wir bezeichnen mit x die gesuchte Anzahl der Münzen. Die Zahl x lässt bei Division durch 2; 3 und 4 jeweils den Rest 1 und ist ohne Rest durch 5 teilbar. Weil 2 ein Teiler von 4 ist und die Zahlen 3 und 4 teilerfremd sind, muss für x gelten:
$x = n \cdot 3 \cdot 4 + 1 = 12n + 1$, wobei n eine natürliche Zahl sein muss. Nun folgt systematisches Probieren, übersichtlich in einer Tabelle dargestellt:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x = 12n + 1	1	13	25	37	49	61	73	85	97
Gilt: 5 | x ?	nein	nein	ja	nein	nein	nein	nein	ja	nein

Tatsächlich erfüllen 25 und 85 alle Bedingungen für die gesuchte Zahl x, also könnte Fanny <u>**25 oder 85 Münzen**</u> haben. (Größere natürliche Zahlen n führen zu Zahlen x, die größer als 100 sind.)

b) Wenn man die bisherigen Überlegungen fortsetzt, erkennt man, dass 25; 85; 145; 205; 265; 325; … mögliche Zahlen für x sind. Oder anders ausgedrückt: Für x muss $x = 60n + 25 \leq 10\,000$ ($n \in \mathbb{N}_0$) gelten. Die angegebene Ungleichung hat genau 167 Lösungen im Bereich der natürlichen Zahlen, nämlich n = 0; 1; 2; … ; 166. Es gibt also <u>**167 mögliche Münzenanzahlen**</u> bis maximal 10 000.

Aufgabe 3: (10 Punkte)

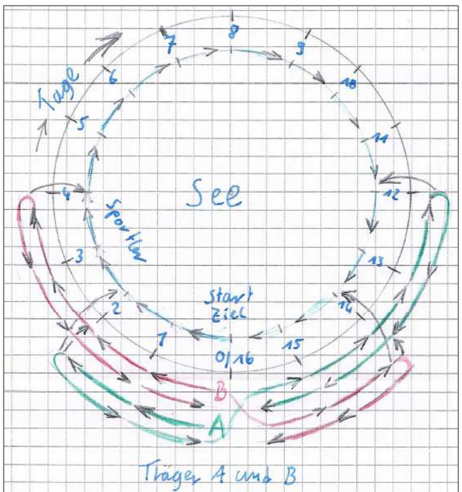


Ein Beispiel für einen Kalender, dessen Seitenlängen beide kürzer als 24 cm sind, ist in der Abbildung angegeben. Dieser hat den Flächeninhalt 14 cm · 23 cm = <u>**322 cm²**</u>.

Dies ist auch der kleinstmögliche Flächeninhalt für einen solchen Kalender; denn um alle Türchen unterzubringen, muss das Rechteck mindestens (1 + 2 + 3 + … + 24) cm² = (12 · 25) cm² = 300 cm² groß sein. Da 23 eine Primzahl ist, hat dieses Türchen die Abmessungen 1 cm · 23 cm. Somit ist eine Seite des Kalenders (genau) 23 cm lang. Da $23 \cdot 13 = 299 < 300$ ist, muss die andere Seite (mindestens) 14 cm lang sein. Der abgebildete Kalender besitzt also minimale Abmessungen und minimalen Flächeninhalt.

Aufgabe 4: (8 Punkte)

a) Es gibt eine mögliche Variante mit <u>**zwei Trägern**</u>:



Lösungsskizze von Henrik Peschke (Sebnitz)

Träger A begleitet die kleine Gruppe nur zwei Tage lang, übergibt dann je zwei Tagesrationen an die beiden anderen und geht mit seinen restlichen zwei Rationen wieder nach Hause (A ist also zunächst vier Tage lang im Einsatz). Träger B begleitet den Sportler vier Tage lang, bekommt nach dem zweiten Tag zwei Rationen vom Träger A überreicht, so dass er nach dem vierten Tag noch sechs Rationen hat - von denen er dem Sportler zwei übergeben und mit den restlichen vier nach Hause zurückkehren kann. (B ist also zunächst acht Tage lang im Einsatz.) Der Sportler hatte am Anfang natürlich auch acht Rationen, die nach dem zweiten bzw. vierten Tag von Träger A bzw. B wieder aufgefüllt werden. Er geht weiter und hat nach insgesamt 12 Tagen den See zu drei Vierteln umwandert. Er hat nun zwar keine Vorräte mehr, aber in diesem Moment trifft Träger A ein, der am 8. Tag in entgegengesetzter Richtung gestartet war. Mit dessen restlichen vier Tagesrationen laufen sie gemeinsam zwei Tage weiter. Dort treffen sie auf Träger B, der am 12. Tag losgelaufen war, um ihnen entgegenzugehen. Alle drei können nun gemeinsam zum Start- und Zielpunkt zurückkehren.

Ein einziger Träger reicht übrigens nicht: Dieser könnte zwar nach $^8/_3$ Tagen $^8/_3$ Tagesrationen übergeben (und zurückgehen) und später auf der anderen Seite $^8/_3$ Tagesmärsche entgegenkommen - dann bleibt aber immer noch eine Lücke, denn wegen $8 + {}^8/_3 = 10^2/_3 < 13^1/_3 = 16 - {}^8/_3$ schafft der Sportler es nicht, diesen zweiten Übergabepunkt zu erreichen.

b) Beide Träger sind insgesamt jeweils 12 Tage im Einsatz, also belaufen sich die Kosten auf <u>**2400 Dollar**</u> (und 40 Tagesrationen).