Lösungen der 4. Serie

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Wir betrachten das Problem zunächst für zwei beliebige Startzahlen a und b:

a	a + b	2a	2 · (a + b)	4a	4 · (a + b)	8a	8 · (a + b)
b	a − b	2b	2 · (a − b)	4b	4 · (a − b)	8b	8 · (a − b)

Man erkennt, dass sich die Zahlen in jeder zweiten Spalte gerade verdoppeln. Umgekehrt kann man also, ausgehend von den Zahlen der achten Spalte, die Zahlen der sechsten, der vierten und der zweiten Spalte durch fortgesetztes Halbieren ermitteln. Ausgehend von den Zahlen der zweiten Spalte erhält man nun die Startzahlen, indem man zunächst die dritte Spalte ausfüllt (also Summe bzw. Differenz bildet) und anschließend jeweils halbiert. Angegeben ist die vollständig ausgefüllte Tabelle mit den gesuchten Startzahlen **<u>17 und 4</u>**.

17	**21**	34	**42**	68	**84**	136	**168**
4	**13**	8	**26**	16	**52**	32	**104**

Aufgabe 2: (8 Punkte)

Die Summe der acht Zahlen beträgt (1+8) + (2+7) + (3+6) + (4+5) = 4 · 9 = 36, also sind beide Teilsummen 18.

Wenn Aussage (1) wahr wäre, dann wäre Lydias Summe mindestens 2+3+4+5+6 = 20 > 18 (und Romans Summe höchstens 1+8+7 = 16 < 18) → Widerspruch!

Wenn Aussage (2) wahr wäre, dann hätte Lydia zwei gerade und drei ungerade Zahlen. Damit wäre ihre Teilsumme aber ungerade und könnte somit nicht 18 betragen. → Widerspruch!

Wenn Aussage (3) falsch wäre, dann wäre Lydias Summe mindestens 1+3+4+5+6 = 19 > 18 (und Romans Summe höchstens 2+8+7 = 17 < 18) → Widerspruch!

Aussage (4): Es wäre zwar möglich, dass Lydia die Karte mit der 5 hat, aber sicher ist das nicht. Es könnte auch sein, dass sie die Karten mit den Zahlen 1; 2; 3; 4 und 8 hat (denn 1+2+3+4+8 = 5+6+7 = 18).

<u>Ergebnis</u>: **Nur** die **Aussage (3)** ist mit Sicherheit wahr.

Alternativ:

Für Romans drei Kartenwerte gibt es nur drei Möglichkeiten: 18 = 8 + 7 + 3 = 8 + 6 + 4 = 7 + 6 + 5
Die zugehörigen drei Möglichkeiten für Lydias fünf Karten lauten: 18 = 1+2+4+5+6 = 1+2+3+5+7 = 1+2+3+4+8

*Man erkennt, dass **nur** die **Aussage (3)** mit Sicherheit wahr ist: Lydia hat mit Sicherheit die Karten mit der 1 und der 2, aber nicht unbedingt die Karte mit der 5. Die Anzahl ihrer ungeraden Karten (genau eine oder drei) ist in jedem Fall ungerade.*

Aufgabe 3: (8 Punkte)

Eine Zahl ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist. Die Quersumme der gesuchten Zahlen beträgt demnach 9 oder 18. (Die Quersumme 27 ist mit drei verschiedenen Ziffern nicht mehr erreichbar.)

Die Quersumme 9 wird erreicht mit folgenden Ziffern: 8/1/0, 7/2/0, 6/3/0, 6/2/1, 5/4/0, 5/3/1, 4/3/2
Die Quersumme 18 wird erreicht mit folgende Ziffern: 9/8/1, 9/7/2, 9/6/3, 9/5/4, 8/7/3, 8/6/4, 7/6/5

Es gibt also insgesamt 14 mögliche Ziffernkombinationen, davon 10 ohne die Null und 4 mit Null. Bei den Kombinationen ohne die Null gibt es je 6 Anordnungsmöglichkeiten, bei den Kombinationen mit Null sind es je 4.

Damit gibt es genau 10 · 6 + 4 · 4 = **<u>76 Zahlen</u>**, die die geforderten Bedingungen erfüllen.

Aufgabe 4: (12 Punkte)

a) Bei drei Siegen erhält man 9 Punkte (= erreichbare Maximalpunktzahl), bei zwei Siegen und einem Unentschieden 7 Punkte. Genau **<u>8 Punkte</u>** können also <u>nicht</u> erreicht werden - alle anderen einstelligen Punktzahlen sind möglich.
(Übrigens: 3 ist die einzige Punktzahl, die man auf zwei verschiedenen Wegen erreichen kann: mit drei Unentschieden oder genau einem Sieg.)

b) Bei jedem Spiel werden maximal 3 Punkte vergeben, also bei 6 Spielen maximal 18 Punkte. Pro Unentschieden verringert sich diese Summe um 1, weil dann nur 2 Punkte verteilt werden. Bei 6 Unentschieden werden insgesamt nur 12 Punkte erreicht. Also ist jede Gesamtpunktzahl **<u>von 12 bis 18 Punkten</u>** möglich. (18 − Anzahl der Unentschieden = 12 + Anzahl der Siege)

c) Die Kombination (9; 6; 3; 0) ist **möglich** - nämlich wenn Mannschaft 1 drei Siege einfährt, Team 2 gegen 3 und 4 gewinnt, sowie Mannschaft 3 das Team 4 schlägt, das damit alle Spiele verloren hat.
Die Kombination (4; 4; 4; 2) dagegen ist **nicht möglich**. Die Summe der Punkte ist 14, also gab es genau 4 Unentschieden und nur 2 Siege (vgl. b). Damit können aber nicht drei Mannschaften je 4 Punkte erreichen.

d) Man muss **<u>mindestens 7 Punkte</u>** sammeln, um mit Sicherheit die nächste Runde zu erreichen. Damit sind in den restlichen 3 Spielen noch höchstens 3 Siege möglich. Das reicht jedoch nicht dafür aus, dass zwei weitere Mannschaften 7 Punkte oder mehr erreichen können - also ist Platz 2 und damit das Weiterkommen gesichert.
6 Punkte könnten unter Umständen nicht ausreichen, weil es sein kann, dass drei Mannschaften je zwei Siege verbuchen (je 6 Punkte). Damit würde eine Mannschaft mit 6 Punkten (nämlich die mit der schlechtesten Tordifferenz) ausscheiden.

e) Die Gesamtpunktzahlen **<u>0 oder 1</u>** reichen mit Sicherheit nicht für ein Weiterkommen, weil man dann gegen mindestens zwei Mannschaften verloren hat und diese somit mindestens 3 Punkte auf dem Konto haben.
2 Punkte dagegen könnten unter Umständen schon fürs Weiterkommen reichen, nämlich dann, wenn eine Mannschaft gegen alle Gegner gewinnt (9 Punkte) und die restlichen drei Spiele Unentschieden enden. So erhalten drei Mannschaften je 2 Punkte, davon erreicht das Team mit der besten Tordifferenz (mit nur 2 Punkten) die nächste Runde.

<u>Knobel-Ei</u>: Man findet achtmal die Zahl 11 in „ALE“ => ACHT ELF IN ALE => **ACHTELFINALE**