# Lösungen der 3. Serie

Kl. 5 - 2017 / 2018

**Aufgabe 1: (6 Punkte)**

Beide Teilaufgaben sind in **4 Zügen** zu lösen, eine Lösung mit weniger als 4 Zügen ist nicht möglich. Zur vereinfachten Angabe der Lösung nummerieren wir die Felder von links nach rechts mit 1; 2; 3; …; 8. Ein Zug wird dadurch eindeutig beschrieben, dass das zu versetzende Spielsteine-Paar benannt wird. (Diese Beschreibung ist eindeutig, weil nur zwei Felder frei sind, auf die somit gezogen werden muss.) Der Reihenfolge nach sind die Steine auf folgenden Feldern zu setzen:

a) **4|5 – 6|7 – 2|3 – 7|8** b) **3|4 – 6|7 – 1|2 – 7|8** .

**Aufgabe 2: (6 Punkte)**

Papa benötigt alleine 60 Minuten für die gesamte Einfahrt, also schafft er in 20 Minuten $^1/_3$ der Einfahrt. Die beiden Söhne schaufeln zusammen den Rest, also $^2/_3$ der Einfahrt, in 20 Minuten frei. Weil Max doppelt so schnell wie Moritz schaufelt, schafft er $^2/_3$ von diesen $^2/_3$, also $^2/_3 \cdot {}^2/_3 = {}^4/_9$ der Einfahrt in 20 Minuten. Moritz schaufelt in 20 Minuten $^1/_3 \cdot {}^2/_3 = {}^2/_9$ der Einfahrt frei. (Kontrolle: $^1/_3 + {}^4/_9 + {}^2/_9 = {}^3/_9 + {}^4/_9 + {}^2/_9 = {}^9/_9 = 1$)

Max schafft $^4/_9$ der Einfahrt in 20 Minuten, also benötigt er für die gesamte Einfahrt 20 min $\cdot\, ^9/_4$ = **45 min**. Für Moritz ergibt sich, dass er 20 min $\cdot\, ^9/_2$ = **90 min** braucht.

*Alternativ:* Nehmen wir einmal an, die Einfahrt wäre genau 60 Meter lang. Dann würde der Papa also pro Minute genau einen Meter vorwärts kommen. Gemeinsam zu dritt würden sie 3 Meter pro Minute schaffen. Diese setzen sich wie folgt zusammen: $3 = p + x + z$ (wobei mit p, x bzw. z die Geschwindigkeiten in Metern pro Minute von Papa, Max bzw. Moritz angegeben sind). Setzt man nun in diese Gleichung die Geschwindigkeit von Papa ein sowie $x = 2z$ (weil Max doppelt so schnell wie Moritz ist), so erhält man: $3 = 1 + x + z = 1 + 2z + z = 1 + 3z \Rightarrow z = {}^2/_3 \Rightarrow x = {}^4/_3$ . Max schafft also 4 Meter in 3 Minuten und hätte somit alleine für die gesamte Auffahrt **45 Minuten** gebraucht. Moritz hätte alleine **90 Minuten** benötigt. (Zum gleichen Ergebnis würde man auch für andere Einfahrtlängen kommen. Die aufgestellte Gleichung wäre dann nur mit einem anderen Faktor zu multiplizieren.)

**Aufgabe 3: (9 Punkte)**

Die Seitensumme muss mindestens 14 betragen, weil der Stein 6-6 irgendwo liegen und mit mindestens zwei Augen zu einer Reihe ergänzt werden muss. Andererseits kann die Seitensumme nicht größer als 14 sein, weil der Stein 1-1 irgendwo liegen und mit höchstens zwölf Augen zu einer Reihe ergänzt werden muss. Daraus lässt sich zum einen schlussfolgern, dass die Augensumme **genau 14** sein muss. Zum anderen ist damit auch schon gezeigt, dass die Steine 1-1 und 6-6 eine Reihe bilden müssen.

An die Ecke mit der 6 kann nun weder der Stein 5-5 noch der Stein 4-4 angelegt werden, weil sonst diese Seitensumme größer als 14 werden würde. Analog darf an die Ecke mit der 1 weder der Stein 2-2 noch der Stein 3-3 angelegt werden, weil die Seitensumme sonst kleiner als 14 werden würde. Es bleiben somit genau zwei mögliche Anlegevarianten. In beiden Fällen lässt sich leicht (und eindeutig) ermitteln, wie die restlichen Steine anzulegen sind.

Damit ist nachgewiesen, dass diese Aufgabe (bis auf Spiegelung und Drehung) genau **zwei verschiedene Lösungen** hat (siehe Abbildung).

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 5 | 3 |
| 1 | | | 3 |
| 6 | | | 4 |
| 6 | 2 | 2 | 4 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 4 | 5 |
| 1 | | | 5 |
| 6 | | | 2 |
| 6 | 3 | 3 | 2 |

**Aufgabe 4: (7 Punkte)**

a) Wenn wir davon ausgehen, dass sich die 62 freigelassenen, markierten Fische wieder gleichmäßig mit den übrigen Fischen vermischt haben, dann bedeutet das, dass beim zweiten Fang das Verhältnis von markierten Fischen zur Gesamtzahl der gefangenen Fische ungefähr genauso groß ist wie das Verhältnis der beim ersten Fang markierten Fische zur Anzahl der Fische im ganzen Teich. Sei nun N die gesuchte Anzahl der Fische im Teich. Dann gilt:

$$\frac{4}{82} = \frac{62}{N} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{N}{62} = \frac{82}{4} \quad \Leftrightarrow \quad N = \frac{62 \cdot 82}{4} = 1271$$

Es schwimmen also ungefähr **1271 (≈ 1270 ≈ 1300) Fische** im Teich. Diese Anzahl stimmt jedoch nur ungefähr, weil sich die Anzahl der Fische im Teich durch das beschriebene Vorgehen nicht exakt bestimmen, sondern nur abschätzen lässt. Zum Beispiel ist die exakte Gleichverteilung der Fische im Teich eben nur eine Annahme.

b) Im Teich befinden sich mit Sicherheit mindestens 62 + (82 − 4) = **140 Fische**, nämlich die 62 markierten Fische vom ersten Fang und die (82 − 4) nicht-markierten Fische vom zweiten Fang.

c) Bekanntlich kann man Summanden bzw. Faktoren jeweils vertauschen, ohne dass sich die Summe bzw. das Produkt verändert (Kommutativgesetz der Addition bzw. Multiplikation). In beiden Rechnungen kann man also die Zahlen 62 und 82 vertauschen, ohne dass sich das Ergebnis ändert. Ein Vertauschen dieser beiden Zahlen in der Aufgabenstellung hat also **keinen Einfluss** auf die beiden Ergebnisse.

*nur auf der Homepage erscheinend:*

## <u>Zusätzliche Lösungshinweise bzw. Anmerkungen</u>

### <u>zu Aufgabe 3b</u>:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 5 | 3 |
| 1 | | | 3 |
| 6 | | | 4 |
| 6 | 2 | 2 | 4 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 4 | 5 |
| 1 | | | 5 |
| 6 | | | 2 |
| 6 | 3 | 3 | 2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | F | F | E |
| A | | | E |
| B | | | D |
| B | C | C | D |

Es gibt genau **<u>zwei</u>** verschiedene Lösungen (siehe Abbildung).

<u>Beweis</u>: Jede Seite des quadratischen Rahmens hat die gleiche Summe S; alle Zahlen zusammen ergeben die Summe 42. Addiert man die vier Seitensummen, so gilt: $4 \cdot S = 42 + A + B + D + E$ (Die Eckzahlen sind doppelt gezählt worden!). Also muss $42 + A + B + D + E$ durch 4 teilbar sein. Das ist nur möglich, wenn diese Summe den Wert 52, 56 oder 60 annimmt, weil die Summe der Zahlen in den Eckfeldern mindestens $1+2+3+4 = 10$ und höchstens $3+4+5+6 = 18$ ist. Für den Wert 52 ergibt sich dann eine Seitensumme von 13, für 56 von 14 und für 60 von 15. Eine ungerade Seitensumme ist aber nicht möglich, weil es in jedem Rahmen 2 Seiten geben muss, die durch jeweils zwei Dominosteine mit einem Zahlenpaar gebildet werden und deshalb eine gerade Summe haben. Also verbleibt nur die Seitensumme 14, und diese ist gleich der Eckensumme $A + B + D + E$. Damit gibt es folgende Möglichkeiten, die Eckfelder durch verschiedene Zahlen zu besetzen: $14 = 1 + 2 + 5 + 6 = 1 + 3 + 4 + 6 = 2 + 3 + 4 + 5$.

Nun kann aber der Dominostein 1-1 nur mit dem Stein 6-6 zusammengelegt werden, wenn die Summe 14 sein soll. Zwei Ecken des Rahmens werden also stets durch die Zahlen 1 und 6 belegt. Damit entfällt die Möglichkeit $2 + 3 + 4 + 5$, und es verbleiben (bis auf Drehung und Spiegelung) nur die beiden angegebenen Lösungen.