Lösungen der 1. Serie

Zur Information:

Die Aufgaben der ersten Serie waren durchaus knifflig. Wir finden es prima, dass du dich trotzdem an sie herangewagt und dich mit ihnen beschäftigt hast. Viele Schüler haben beachtlich hohe Punktzahlen erzielt, z. B. haben immerhin 50 der 106 Teilnehmer mindestens 25 Punkte erreicht. Aber auch diejenigen, bei denen die Punkteausbeute vielleicht nicht ganz so hoch war wie aus dem Unterricht gewohnt, sollten den Kopf nicht hängen lassen.

Arbeite bitte auch die angegebenen Lösungsvorschläge durch. Sie sollen dir helfen, bestimmte Herangehensweisen an mathematische Fragestellungen kennen zu lernen. Volle Punktzahl kann bei einer Aufgabe nur erzielt werden, wenn die Lösungen und der Lösungsweg ***vollständig, nachvollziehbar*** *und* ***übersichtlich*** *dargestellt und die einzelnen Teilschritte exakt* ***begründet*** *worden sind.*

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Das Quadrat hat einen Umfang von 4 · 12 cm = 48 cm. Das gleichseitige Dreieck hat den gleichen Umfang, und deshalb beträgt seine Seitenlänge 48 cm : 3 = 16 cm. Ebenso groß ist die eine Seitenlänge des Rechtecks. Die andere Seitenlänge des Rechtecks beträgt somit (48 cm − 2 · 16 cm) : 2 = (48 cm : 2 − 16 cm) = 8 cm.

Ergebnis: Die gesuchten Seitenlängen des Rechtecks betragen **16 cm** und **8 cm**.

Aufgabe 2: (10 Punkte)

a) Es gibt 4 einstellige Möglichkeiten. Bei den zweistelligen Zahlen kann an der Zehnerstelle eine der vier Ziffern stehen. Zu jeder dieser 4 Zehnerziffern kann man die Einerziffer aus 3 Möglichkeiten wählen (die bereits gewählte Zehnerziffer scheidet aus). Insgesamt gibt es also 4 · 3 = 12 zweistellige Zahlen. Die dreistelligen Zahlen erhält man aus den zweistelligen, indem eine weitere Ziffer hinten angehängt wird. Da bereits zwei Ziffern „verbraucht“ sind, kann man noch jeweils eine von 2 möglichen Ziffern anhängen (4 · 3 · 2 = 24 Möglichkeiten). Ebenso groß ist die Anzahl der möglichen vierstelligen Zahlen, weil sich die letzte Ziffer jeweils zwingend ergibt. Man erhält somit insgesamt **64** mögliche Zahlen mit den geforderten Eigenschaften. (4 + 12 + 24 + 24 = 64).

b) Von diesen insgesamt 64 Zahlen sind **17** Zahlen durch 3 teilbar. Diese Anzahl kann man sinnvoll durch systematisches Zählen ermitteln, wobei man die Teilbarkeitsregel der 3 anwendet: Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme (also die Summe ihrer Ziffern) durch 3 teilbar ist. Damit ist schon mal klar, dass keine der möglichen vierstelligen Zahlen durch 3 teilbar sein kann, denn die Quersumme beträgt 16 und ist damit kein Vielfaches von 3. Schauen wir uns einmal an, welche Reste die einzelnen Ziffern bei Division durch 3 lassen (siehe kleine Tabelle). Damit bei einer zweistelligen Zahl die Quersumme durch 3 teilbar ist, müssen sich die Dreierreste zu 3 addieren, mehr Möglichkeiten gibt es hier nicht. Dementsprechend findet man 4 mögliche zweistellige Zahlen (siehe große Tabelle). Bei den dreistelligen Zahlen ist die einzige mögliche Kombination von Dreierresten 0+1+2=3, was zu den Zahlen 135 und 357 führt (sowie die durch Ziffernvertauschung daraus entstehenden Zahlen).

Ziffer	1	3	5	7
Dreierrest	1	0	2	1

	Anzahl gesamt	**Durch 3 teilbar**	Begründung / Bemerkung
Einstellig:	4	1	Nur die 3 ist durch 3 teilbar.
Zweistellig:	4 · 3 = 12	4	Den Dreierrest 1 + 2 = 3 haben 15; 51; 57 und 75.
Dreistellig:	4 · 3 · 2 = 24	2 · 6 = 12	Den Dreierrest 0 + 1 + 2 = 3 haben je 6 Variationen von 135 (135; 153; 315; 351; 513; 531) und von 357
Vierstellig:	4 · 3 · 2 · 1 = 24	0	Die Quersumme ist 16 und somit nicht durch 3 teilbar.
Insgesamt:	**64**	**17**	17 = 1 + 4 + 12 + 0

Aufgabe 3: (8 Punkte)

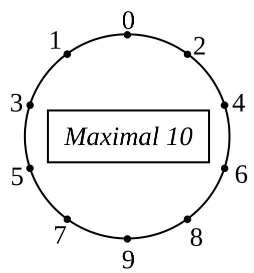
a) Es gibt vier mögliche Startläufer. Für die zweite Position gibt es dann noch drei mögliche Läufer usw. (systematisches Zählen wie bei Aufgabe 2a). Theoretisch sind also 4 · 3 · 2 · 1 = **24** verschiedene Laufreihenfolgen möglich.

b) Auf Position 1 sind nach Aussage (1) entweder Chris oder Dirk. Nach Aussage (3) muss Dirk der Startläufer sein, da er vor Chris läuft. Weil Alex vor Björn läuft (nach Aussage 4) und Björn vor Chris (nach Aussage 3), müssen diese drei also in dieser Reihenfolge die Positionen 2 bis 4 belegen. Die gesuchte Laufreihenfolge lautet: **Dirk - Alex - Björn - Chris**.

c) Die Aussage (2) ist bei b) nicht benötigt worden, sie ist also überflüssig.

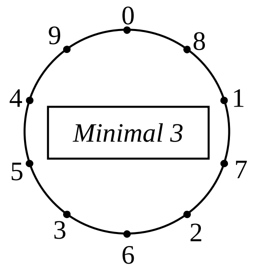
Alternativer Lösungsweg für b), bei dem man dann aber alle vier Aussagen verwendet:
Wegen (2) und (3) muss Chris an Position 4 laufen. Wegen (1) und (4) müssen Alex und Björn (in dieser Reihenfolge) die Positionen 2 und 3 belegen. Jetzt bleibt für Dirk nur noch die Startposition übrig.

Aufgabe 4: (9 Punkte)



a) Tatsächlich gibt es Anordnungen mit **zehn** verschiedenen Summenwerten. In dem Beispiel in der Abbildung ergeben sich die folgenden Summenwerte: 1; 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 17.

b) In dem Beispiel in der Abbildung ergeben sich nur **drei** verschiedene Summenwerte, nämlich 8; 9 und 13.



c) Kleiner als 3 kann die Anzahl verschiedener Summenwerte nicht sein. Begründung:
Nur ein einziger Summenwert ist unmöglich, weil dann die beiden Nachbarn einer Zahl gleich sein müssten, was nicht geht. Auch nur zwei verschiedene Summenwerte sind unmöglich, wie folgende Überlegung zeigt: Neben der 0 würden zwei verschiedene Zahlen stehen (nennen wir sie x und y), womit auch schon zwei verschiedene Summen festgelegt wären. Eine dieser beiden Zahlen wäre die größere von beiden, diese sei (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) die Zahl x. Diese Zahl x könnte nun auf der anderen Seite weder zur Summe x führen (denn dann müsste dort noch eine weitere 0 stehen) noch zur Summe y (weil x allein ja schon größer als y ist), also entsteht dort ein dritter Summenwert. Demzufolge kann es eine Anordnung mit nur zwei verschiedenen Summenwerten nicht geben.